



Des problèmes inverses parcimonieux en sciences de l'Univers

Signal mesuré y

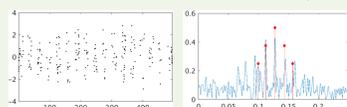
Problème direct : simulation des modèles

- Modèle $v(\theta)$ linéaire ou non
- Modèle sur le bruit ϵ

Problème inverse : estimation des variables $\theta = [\theta_1 \dots \theta_L]$ tq $y \approx v(\theta)$.

? Nombre de composantes L ?
 L faible \Rightarrow Parcimonie

Analyse spectrale : $\theta = (\nu, s)$

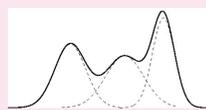


Signal de 5 sinusoïdes irrégulièrement échantillonné.

- ν : fréquences
- s : amplitudes des fréquences associées
- ? L : nombre de fréquences

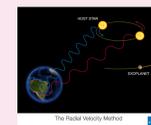
Somme de gaussiennes

$$\theta = (\mu, \Sigma, A)$$



- μ, Σ : moyennes et variances des gaussiennes
- A : amplitudes des gaussiennes
- ? L : nombre de gaussiennes

Détection d'exoplanètes



Vitesses radiales de l'étoile liées aux paramètres orbitaux des trajectoires képlériennes

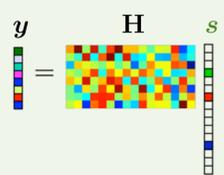
$$\theta = (P, e, T_P, \omega_0, K)$$

- P, e, T_P, ω_0 : périodes, excentricités, temps et arguments des passages au périastre
- K : amplitudes des trajectoires
- ? L : nombre d'exoplanètes

Méthodes classiques d'approximation parcimonieuse pour des modèles linéaires

Objectif : estimer (ν_ℓ, s_ℓ) tq $y \approx \sum_{\ell=1}^L h(\nu_\ell) s_\ell$.

Approximation parcimonieuse : discrétiser ν sur une grille $\Omega_\nu = [\nu_1^\Omega, \dots, \nu_K^\Omega]$ avec $K \gg L$. Avec $h_k = h(\nu_k^\Omega)$:



$$y = Hs + \epsilon = \sum_{k=1}^K h_k s_k + \epsilon$$

- Combinaison linéaire d'atomes h_k pris dans un dictionnaire H .
- Parcimonieux : peu de $s_k \neq 0$.

Nouvel objectif : estimer s_k tels que $y \approx Hs$ et les $s_k \neq 0$ indiquent les $\nu_k \in \Omega_\nu$ présents dans y .

Approches déterministes

$$\hat{s} = \arg \min_s (\|y - Hs\|_{\Sigma^{-1}}^2 + \alpha \|s\|_0)$$

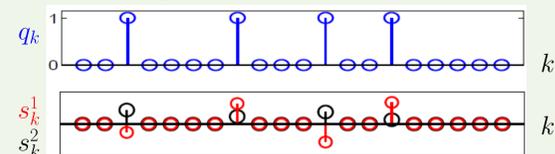
$\|s\|_0 = \text{Card}(k | s_k \neq 0)$: pseudo-norme ℓ_0

\Rightarrow problème NP-hard

- Algorithmes gloutons : choix itératif des atomes h_k . Exemple : l'Orthogonal Matching Pursuit (OMP).
- Relaxation convexe : remplacement de la pseudo-norme ℓ_0 par la norme ℓ_1 .

- 😊 Gloutons, $\ell_1 \Leftrightarrow \ell_0$ pour un dictionnaire H non corrélé.
- ☹ Pas d'équivalence pour un dictionnaire H corrélé.

App. stochastique : Modèle Bernoulli-Gaussien



$$\Pr(q_k = 1) = \lambda \quad s_k | q_k = 1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_s^2 \mathbf{I}_m)$$

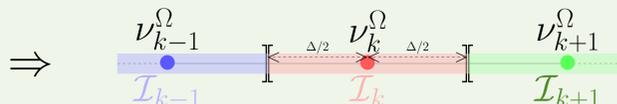
$$\Pr(q_k = 0) = 1 - \lambda \quad s_k | q_k = 0 \sim \delta_0(s_k)$$

$(q_k, s_k) \sim$ loi a priori Bernoulli-Gaussienne

- \Rightarrow A priori Bernoulli sur q_k : $\lambda \ll 1 \Rightarrow$ parcimonie.
- \Rightarrow Algorithmes MCMC (Gibbs) : moyenne a posteriori.

Approximation parcimonieuse linéaire

$$\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad : \quad \nu_k = \nu_k^\Omega \in \Omega_\nu$$



Approx. parcimonieuse non linéaire

$$\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad : \quad \nu_k \in \mathcal{I}_k = [\nu_k^\Omega - \frac{\Delta}{2}; \nu_k^\Omega + \frac{\Delta}{2}]$$

Interpolation de dictionnaire

Ici, les s_k sont scalaires : $s_k = x_k$.

$$y_{AP \text{ non linéaire}} \approx \sum_k x_k h(\nu_k) \approx \sum_k \tilde{h}_k \tilde{x}_k$$

où $\tilde{x}_k = f(x_k, \nu_k)$, avec $f(\cdot, \cdot)$ fonction inversible.

- Interpolations de Taylor et Polaire. Exemple Taylor 1 : $\Rightarrow x h(\nu) \approx x h(\nu_k^\Omega) + x \delta h'(\nu_k^\Omega)$ où $\nu = \nu_k^\Omega + \delta$ et $|\delta| < \frac{\Delta}{2}$
 \Rightarrow ici, $\tilde{x}_k = [x, x \delta]^T$ et $\tilde{h}_k = [h(\nu_k^\Omega), h'(\nu_k^\Omega)]$.
- Méthode : 2 étapes sources d'erreurs.
 - estimer \tilde{x}_k tels que $y \approx \sum_k \tilde{h}_k \tilde{x}_k$ (AP linéaire)
 - puis identifier $(x_k, \nu_k) = f^{-1}(\tilde{x}_k)$.
- Adaptation des méthodes classiques d'AP linéaire : ajout de contraintes pour garantir l'identifiabilité.
 - \Rightarrow par ex (Taylor 1) : $|\delta|_{\text{identification}} = \frac{|\tilde{x}_k(2) - \tilde{x}_k(1)|}{|\tilde{x}_k(1)|} < \frac{\Delta}{2}$.
- Méthodes testées ici :
 - \Rightarrow PoIBOMP : OMP avec interpolation polaire.
 - \Rightarrow CCBP : relaxation convexe avec interpolation polaire.

Local OMP

LOOMP : algorithme OMP + calcul d'une grille locale

Début : résidu $r = y$, atomes sélectionnés $\hat{H} = \emptyset$.

Tant que le critère d'arrêt n'est pas atteint, on répète :

1. Calcul d'une grille locale $\hat{\Omega}_\nu = [\hat{\nu}_1, \dots, \hat{\nu}_K]$:
pour tout k , $(\hat{\nu}_k, \hat{s}_k) = \arg \min_{\nu \in \mathcal{I}_k, s} \|r - h(\nu)s\|^2$.

2. Sélection : $\ell = \arg \min_k \|r - h(\hat{\nu}_k)\hat{s}_k\|^2$.

3. Mise à jour : $\hat{H} = [\hat{H}, h(\hat{\nu}_\ell)]$, $r = y - \hat{H}\hat{s}$,
où $\hat{s} = (\hat{H}^T \hat{H})^{-1} \hat{H}^T y$.

Post-traitement : méthode SparSpec

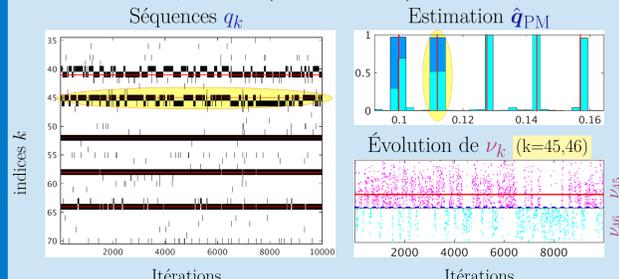
- Résolution du problème de relaxation convexe sur Ω_ν pour l'analyse spectrale.
- + Réestimation des amplitudes et remplacement des doublons par leur barycentre.

BGE : Modèle BG étendu

Prise en compte de $\nu_k \in \mathcal{I}_k$ dans le modèle : on considère la loi a posteriori $p(q, s, \nu, \lambda, \sigma_e^2, \sigma_s^2 | y)$:

- Bruit $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^2 \mathbf{I}_N)$.
 - Loi a posteriori conditionnelle en (q_k, s_k) toujours Bernoulli-Gaussienne \Rightarrow échantillonnage de Gibbs.
 - Non-linéarité en $\nu_k \Rightarrow$ échant. Métropolis-Hastings.
 - Marginalisation suivant $s \Rightarrow$ convergence accélérée.
 - Échantillonnage des hyperparamètres $(\lambda, \sigma_e^2, \sigma_s^2)$.
- \Rightarrow Partially Collapsed Hybrid-Gibbs sampler

Échantillons typiques (1 réalisation)



Comparaison des différentes méthodes

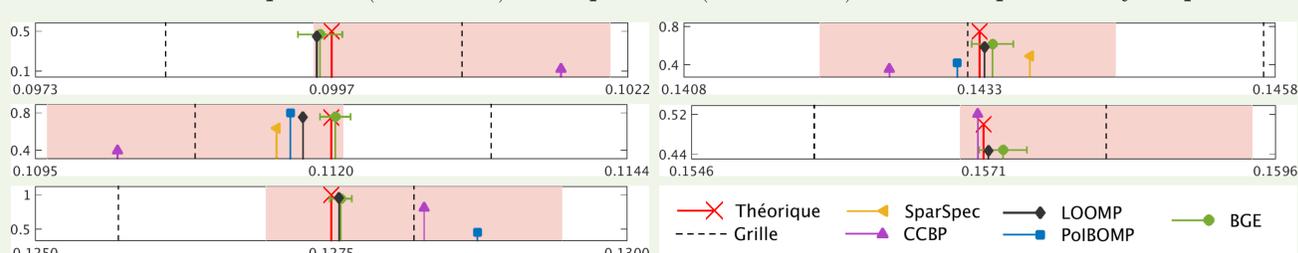
Exemple d'application : Analyse spectrale [1, 2]

- $h(\nu_k) = [\cos(2\pi\nu_k t), \sin(2\pi\nu_k t)]$
- $K = 100$ intervalles de largeur $\Delta = 2.5 \cdot 10^{-3}$ c/jour

Erreur moyenne sur l'estimation des fréquences (MSE) et temps de calcul.

	SparSpec	LOOMP	BGE	IBOMP	CCBP
MSE %	2.3	0.089	0.075	2.1	0.94
Temps	0.02 s	4.79 s	351 s	0.05 s	442 s

Estimation des fréquences (en abscisses) et amplitudes (en ordonnées) sur l'exemple d'analyse spectrale



Conclusion

- ★ Méthode d'interpolation PoIBOMP et CCBP : erreurs d'approximation et d'identification significatives.
- ★ Sensibilité de LOOMP aux minima locaux : dans des cas plus compliqués (détection d'exoplanètes).
- ★ BGE moins rapide que LOOMP, mais probabilité de détection, barre d'erreur et non supervision possible.

Perspectives

- Ajout de variables binaires pour résoudre le problème de norme ℓ_0 grâce aux Mixed Integer Programming (MIP), à associer aux méthodes d'interpolations.
- Tests des différentes méthodes d'algorithmes gloutons avec gradient (type LOOMP) ainsi que le BGE pour la détection d'exoplanètes.

Articles de conférence

- [1] M. Boudineau, H. Carfantan, S. Bourguignon, and M. Bazot. Sampling schemes and parameter estimation for nonlinear Bernoulli-Gaussian sparse models. In *Statistical Signal Processing (SSP) Workshop*. IEEE, 2016.
- [2] M. Boudineau and H. Carfantan. Approximation parcimonieuse avec dictionnaire continu pour l'analyse spectrale de données irrégulièrement échantillonnées. Soumis au GRETSI 2017.